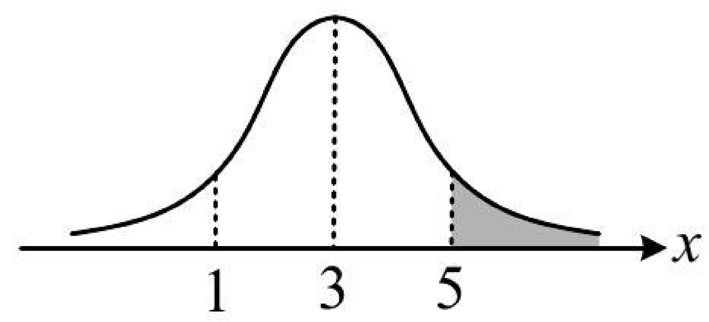
第 4 节 正态分布（★★☆）

强化训练

1．（2022 • 江西模拟 • ★）设随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，若 $P(X>5)=0.2$，则 $P(1<X<3)=$_____.

答案：0.3

解析：本题的正态曲线如图，$P(1<X<3)=P(3<X<5)=P(X>3)-P(X>5)=0.5-0.2=0.3$.



2．（2023 • 潍坊一模 • ★★）某学校共 1000 人参加数学测验，考试成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(100,\sigma^2)$，若 $P(80\le\xi\le100)=0.45$，则估计成绩在 120 分以上的学生人数为（　　）

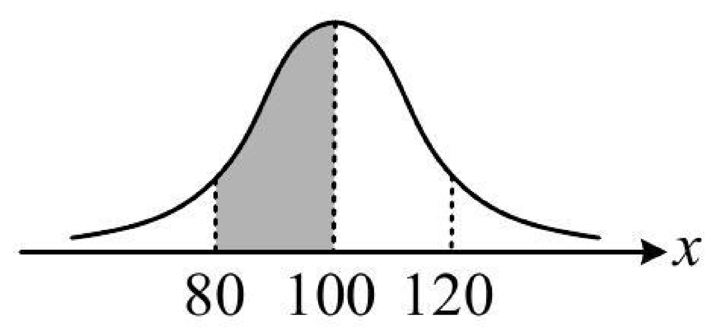
（A）25　（B）50　（C）75　（D）100

答案：B

解析：应先求出 $P(\xi>120)$，才能估计成绩在 120 分以上的人数，可画正态曲线来看，

如图，$P(X>120)=\dfrac{1-P(80\le X\le120)}{2}=\dfrac{1-2P(80\le X\le100)}{2}=\dfrac{1-2\times0.45}{2}=0.05$，

所以成绩在 120 分以上的学生人数约为 $1000\times0.05=50$.



3．（2023 • 四省联考 • ★★★）某工厂生产的产品的质量指标服从正态分布 $N(100,\sigma^2)$，质量指标介于 99 至 101 之间的产品为良品，为使这种产品的良品率达到 95.45%，则需调整生产工艺，使得 σ 至多为_____.（附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<2\sigma)\approx0.9545$）

答案：$\dfrac{1}{2}$

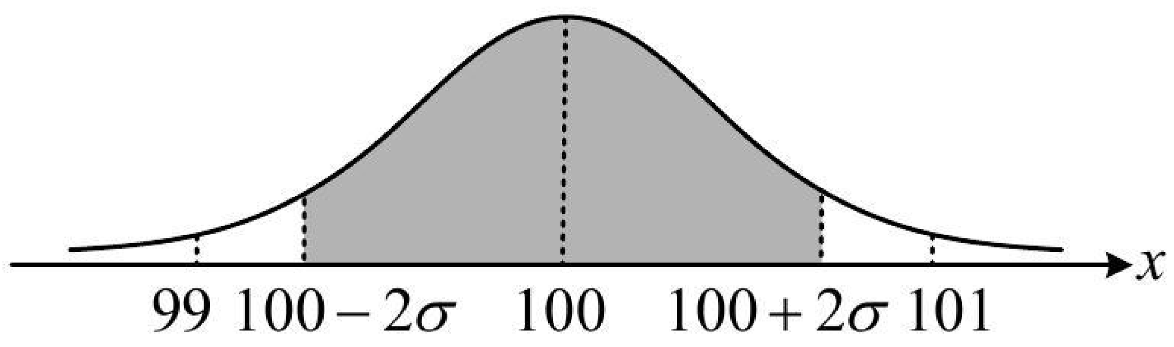
解析：注意到 95.45%恰好是 $P(|X-\mu|<2\sigma)$，故先把本题的 μ 代入此不等式，

由所给数据，$P(|X-\mu|<2\sigma)=P(-2\sigma<X-\mu<2\sigma)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx0.9545$ ①，

本题中，质量指标服从正态分布 $N(100,\sigma^2)\Rightarrow\mu=100$，代入①得：$P(100-2\sigma<X<100+2\sigma)\approx0.9545$，

如图，故要使良品率达到 95.45%，即 $P(99<X<101)\ge95.45\%$，此时 $(99,101)$ 应包含 $(100-2\sigma,100+2\sigma)$，

所以 $\begin{cases}100+2\sigma\le101\\100-2\sigma\ge99\end{cases}$，解得：$\sigma\le\dfrac{1}{2}$，所以 σ 至多为 $\dfrac{1}{2}$.



4．（2023·洛阳模拟·★★★★）某汽车公司最近研发了一款新能源汽车，以单次最大续航里程 500 公里为标准进行测试，且每辆汽车是否达到标准相互独立，设每辆新能源汽车达到标准的概率为 $p(0<p<1)$，当 100 辆汽车中恰有 80 辆达到标准的概率取最大值时，若预测该款新能源汽车的单次最大续航里程为 X，且 $X\sim N(550,\sigma^2)$，则预测这款汽车的单次最大续航里程不低于 600 公里的概率为（　　）

（A）0.2　（B）0.3　（C）0.6　（D）0.8

答案：A

解析：应先分析 p 为何值时，100 辆汽车中恰有 80 辆达到标准的概率取得最大值，

由题意，100 辆汽车中达到标准的汽车辆数服从二项分布 $B(100,p)$，

所以恰有 80 辆达到标准的概率为 $C_{100}^{80}p^{80}(1-p)^{20}$，此式较复杂，可构造函数求导分析最大值，

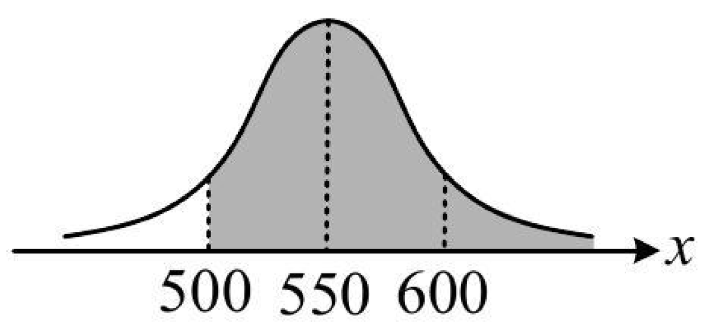
设 $f(p)=C_{100}^{80}p^{80}(1-p)^{20}(0<p<1)$，则 $f'(p)=C_{100}^{80}[80p^{79}(1-p)^{20}-p^{80}\cdot 20(1-p)^{19}]=C_{100}^{80}p^{79}(1-p)^{19}(80-100p)$，

所以 $f'(p)>0\Leftrightarrow 0<p<0.8$，$f'(p)<0\Leftrightarrow 0.8<p<1$，从而 $f(p)$ 在 $(0,0.8)$ 上↗，在 $(0.8,1)$ 上↘，

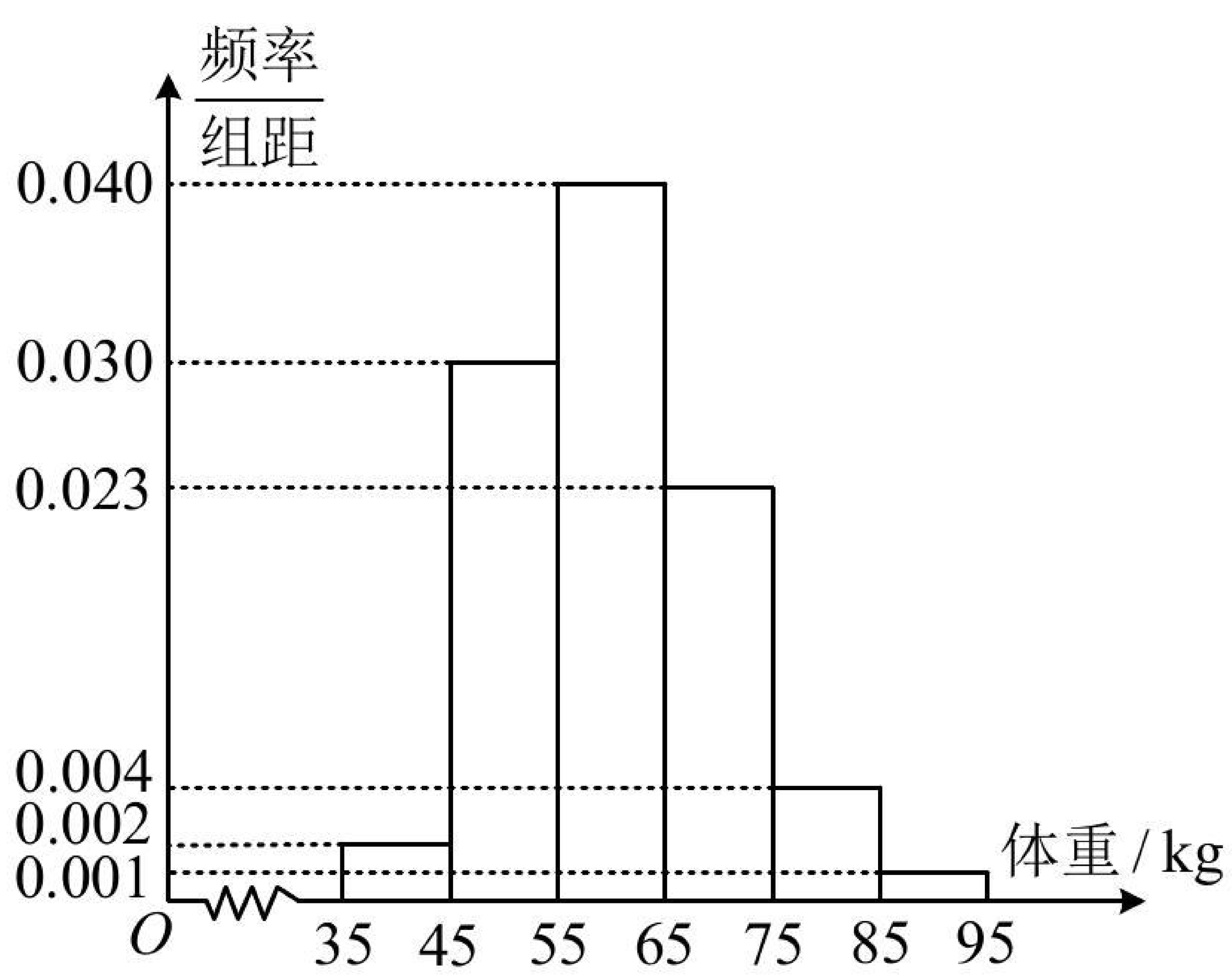
故当 100 辆汽车中恰有 80 辆达到标准的概率取最大值时，$p=0.8$，

达到标准即最大续航里程不低于 500 公里，这一结果可翻译成 X 的取值概率，由题意，$P(X\ge 500)=0.8$，

在此基础上求 $P(X\ge 600)$，可画正态曲线来看，如图，$P(X\ge 600)=P(X\le 500)=1-P(X\ge 500)=1-0.8=0.2$.



5．（2023·安徽模拟·★★★）为贯彻落实《健康中国行动（2019~2030 年）》、《关于全面加强和改进新时代学校体育工作的意见》等文件的精神，确保 2030 年学生体质达到规定要求，各地将认真做好学生的体质健康检测. 某市决定对某中学学生的身体健康状况进行调查，现从该校抽取 200 名学生测量他们的体重，得到如下的样本数据的频率分布直方图.



（1）求这 200 名学生体重的平均数 $\bar{x}$ 和方差 s^2；（同一组数据用该区间的中点值作代表）

（2）由频率分布直方图可知，该校学生的体重 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，σ^2

近似为样本方差 s^2.

①利用该正态分布，求 $P(50.73<Z\le 69.27)$；

②若从该校随机抽取 50 名学生，记 X 表示这 50 名学生的体重位于区间 $(50.73,69.27]$ 内的人数，利用①的结果，求 $E(X)$.

参考数据：$\sqrt{86}\approx 9.27$，若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Z\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<Z\le\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.

解：（1）由图可知，$\bar{x}=40\times0.02+50\times0.3+60\times0.4+70\times0.23+80\times0.04+90\times0.01=60$，

$s^2=(40-60)^2\times0.02+(50-60)^2\times0.3+(70-60)^2\times0.23+(80-60)^2\times0.04+(90-60)^2\times0.01=86$.

（2）①由题意，$\mu=60$，$\sigma^2=86$，所以 $\sigma=\sqrt{86}\approx 9.27$，

（要求 $P(50.73<Z\le 69.27)$，结合给的是 3σ 区间概率知应先找到 50.73 和 69.27 与 μ，σ 的关系）

因为 $\mu-\sigma=60-9.27=50.73$，$\mu+\sigma=60+9.27=69.27$，

所以 $P(50.73<Z\le 69.27)=P(\mu-\sigma<Z\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$.

②（题干没给该校共有多少学生，可认为该校学生人数很多，从中随机抽取 50 名，可以近似看成 50 重伯努利试验，故用二项分布求 $E(X)$ 即可）

由①可得，$X\sim B(50,0.6827)$，所以 $E(X)=50\times0.6827=34.135$.

6.（2017 • 新课标 I 卷 • ★★★★）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

（1）假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X\ge1)$ 及 X 的数学期望；

（2）一天内抽检的零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

（i）试说明上述监控生产过程方法的合理性；

（ii）下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2)}\approx 0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$.

用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ（精确到 0.01）.

附：若随机变量 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$，$0.9974^{16}\approx 0.9592$，$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

解：（1）（把抽取 16 个零件看成 16 次独立重复试验，对每个零件，若尺寸落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 外，则称试验成功，则 16 个零件中尺寸落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 外的个数 X 即为成功次数，应服从二项分布）

由所给数据，每个零件尺寸落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$的概率为 0.9974，

所以尺寸落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之外的概率为 0.0026，故$X\sim B(16,0.0026)$，所以$E(X)=16\times 0.0026=0.0416$，

（再求$P(X\geq 1)$，考虑到$X\geq 1$的情况较多，但其对立面只有$X=0$一种情况，故用对立事件求概率）

所以$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.9974^{16}\approx 0.0408$.

（2）（i）如果生产状态正常，一个零件尺寸在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之外的概率只有 0.0026，一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之外的概率为 0.0408，发生的概率很小，因此一旦发生这种情况，就有理由认为可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，故监控生产过程的方法合理.

（ii）（要看是否需对当天的生产过程进行检查，就看有没有$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$外的零件，故先由所给抽取的 16 个零件的参考数据计算μ和σ的估计值）

由所给数据知$\bar{x}=9.97$，$s\approx 0.212$，所以μ和σ的估计值分别为$\hat{\mu}=9.97$，$\hat{\sigma}=0.212$，

从而$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}=9.97-3\times 0.212=9.334$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}=9.97+3\times 0.212=10.606$，

抽检的 16 个尺寸中$9.22\notin(9.334,10.606)$，故需对当天的生产过程进行检查；

（再算剔除 9.22 后的均值和方差，均值易算，对于方差，由参考数据中的$s=\sqrt{\frac{1}{16}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2)}\approx 0.212$容易求出$\sum_{i=1}^{16}x_i^2$，只需减掉$9.22^2$即可得到余下数据的平方和，故代公式$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$来算新方差）

剔除 9.22 这个数据之后，μ的估计值为$\frac{9.97\times 16-9.22}{15}=10.02$，

由$s=\sqrt{\frac{1}{16}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2)}\approx 0.212$可得$\sum_{i=1}^{16}x_i^2=0.212^2\times 16+16\times 9.97^2\approx 1591.134$，

剔除 9.22 这个数据后，剩下的数据的样本方差约为$\frac{1}{15}\times(1591.134-9.22^2)-10.02^2\approx 0.008$，

所以σ的估计值为$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.